Лекція № 25

На минулій лекції отримали формулу (7.6) для усередненого векторного потенціалу системи зарядів, що рухаються стаціонарно (в обмеженому об’ємі зі скінченними швидкостями). Нагадаємо її

$$\overline{\vec{A}} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'.$$

Згідно з визначенням тривимірної густини струму

$$\vec{j} = \rho\vec{v}$$

(це кількість заряду, що проходить за одиницю часу через одиничну площину в напрямку, перпендикулярному цій площині).

Для точкових зарядів

$$\rho(\vec{r}\,') = \sum_a e_a\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_a); \quad \vec{j} = \sum_a e_a\vec{v}\,'\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_a).$$

замість інтегралу по об’єму (7.6) отримуємо для векторного потенціалу суму по зарядах

$$\overline{\vec{A}} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\sum\limits_a e_a\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_a)\vec{v}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' = \sum_a e_a\iiint\limits_V \frac{\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_a)\vec{v}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' = \sum_a \frac{e_a\vec{v}_a}{|\vec{r}-\vec{r}_a|};$$

$$\overline{\vec{A}} = \frac{1}{c}\sum_a \frac{e_a\vec{v}_a}{|\vec{r}-\vec{r}_a|}. \tag{7.7}$$

Перевіримо, що розв’язок (7.6) задовольняє умові (7.4). Дивергенцію беремо по $\vec{r}$, а інтегруємо по $\vec{r}\,'$ тому можна змінити порядок інтегрування та диференціювання.

$$\mathrm{div}\overline{\vec{A}} = \frac{1}{c}\mathrm{div}\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dV'\right] = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \mathrm{div}\left(\frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dV'.$$

Вираз під знаком інтегралу:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)=\left(\nabla_r,\frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)=\left(\overline{\vec{j}(\vec{r}\,')},\nabla_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right);$$

$$\nabla_r\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)=-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')=-\nabla_{r'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right);$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)=-\left(\overline{\vec{j}(\vec{r}\,')},\nabla_{r'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right)=-\rho(\vec{r}\,')\left(\vec{\upsilon}\,',\nabla_{r'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right);$$

Повна похідна по часу від довільної скалярної функції координат та часу

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}=\frac{\partial f}{\partial t}+(\vec{\upsilon},\nabla)f\ .$$

Маємо

$$\left(\vec{\upsilon}\,',\nabla_{r'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\right)=\left(\vec{\upsilon}\,',\nabla_{r'}\right)\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)=-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right). \tag{7.8}$$

В даному випадку явної залежності від t немає, тому вираз є повною похідною по часу від $\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$. Після усереднення по часу така похідна звертається до нуля згідно із загальною теоремою (ф-ла (7.1)):

$$\overline{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)}=0$$

Таким чином, довели, що $\operatorname{div}\overline{\vec{A}}=0$ для векторного потенціалу сталого магнітного поля, визначеного формулою (7.6).

7.2. Закон Біо–Савара–Лапласа

Шукаємо напруженість магнітного поля з векторним потенціалом (7.6) за формулою (7.3). Ротор береться по координатах точки спостереження, а інтеграл – по області, де є струми, тому інтегрування та операцію знаходження ротору можна змінити місцями:

$$\overline{\vec{H}}=\operatorname{rot}\overline{\vec{A}}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\left(\iiint\limits_V\frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'\right)=\frac{1}{c}\iiint\limits_V\operatorname{rot}\left(\frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)dV'.$$

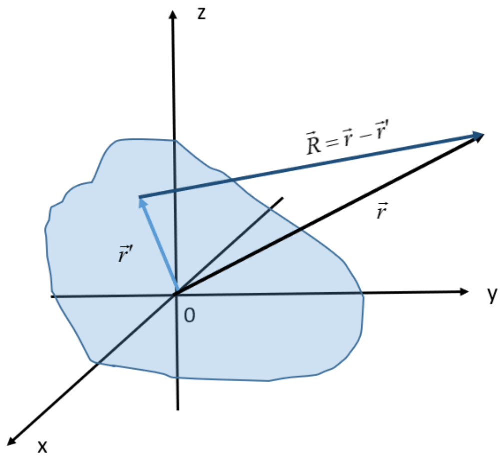
Шукаємо

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}')}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)=\left[\nabla_r,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\overline{\vec{j}(\vec{r}')}\right]=-\left[\overline{\vec{j}(\vec{r}')},\nabla_r\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\right]=$$

$$=\left[\overline{\vec{j}(\vec{r}')},\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right)\right]=\frac{\left[\overline{\vec{j}(\vec{r}')},\vec{r}-\vec{r}'\right]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}=\frac{\left[\overline{\vec{j}(\vec{r}')},\vec{R}\right]}{R^3};$$

$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'.$$

Отримали формулу закону Біо–Савара–Лапласа для струму в об’ємі

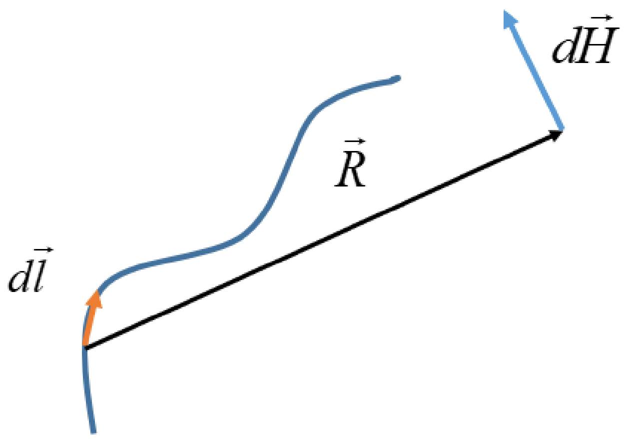


$$\overline{\vec{H}}=\frac{1}{c}\iiint_V\frac{\left[\overline{\vec{j}(\vec{r}')},\vec{R}\right]}{R^3}dV'. \tag{7.9}$$

Спочатку цей закон був отриманий для лінійного струму з лінійною густиною $\vec{j}=J\vec{n}$. В загальній формулі (7.9) робимо заміну струму в елементі об’єму dV' $\vec{j}dV'$ на струм у лінійному елементі провідника довжини $d\vec{l}$ $Jd\vec{l}$:

$$\overline{\vec{H}}=\frac{1}{c}\iiint_V\frac{\left[\overline{\vec{j}(\vec{r}')},\vec{R}\right]}{R^3}dV'=\frac{1}{c}\int\frac{\left[Jd\vec{l},\vec{R}\right]}{R^3}=\frac{J}{c}\int\frac{\left[d\vec{l},\vec{R}\right]}{R^3}.$$

Закон Біо–Савара–Лапласа для лінійного струму



$$\vec{H} = \frac{J}{c}\int \frac{\left[d\vec{l}\,, \vec{R}\right]}{R^3}. \qquad (7.10)$$

Закон Біо–Савара–Лапласа був відкритий експериментально в 1820 році. Біо та Савар досліджували залежність величини та напрямку $\vec{H}$ від сили струму J та напрямку струму $d\vec{l}$. Лаплас запропонував формулу, яка описує таке магнітне поле. Результуюче поле є векторною сумою (суперпозицією) полів, що створені окремими елементарними осередками струму

$$d\vec{H} = \frac{J}{c}\frac{\left[d\vec{l}\,, \vec{R}\right]}{R^3}. \qquad (7.11)$$

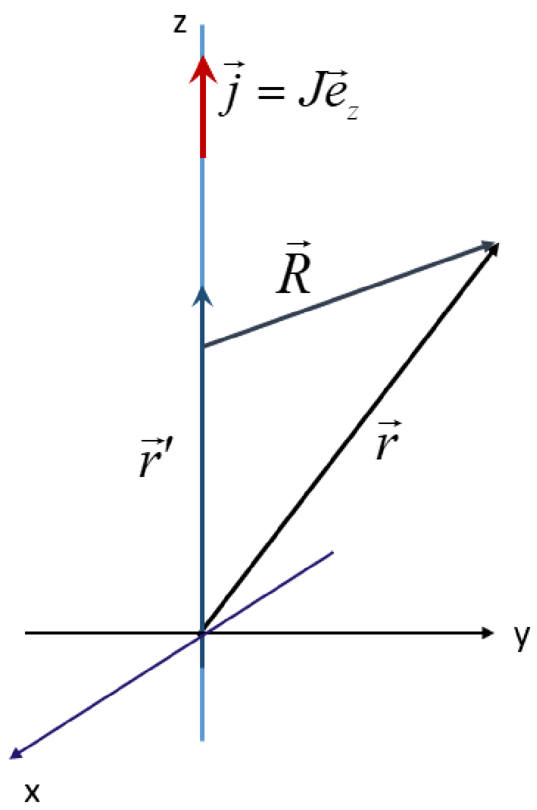
Формула (7.11) визначає поле, яке створює елемент струму довжини dl. Вектор $d\vec{l}$ спрямований у напрямку протікання струму. Обертання навколо $d\vec{l}$ у напрямку $d\vec{H}$ визначається правилом буравчика (правого гвинта). Це правило еквівалентно правилу знаходження векторного добутку.

7.2.1. Магнітне поле лінійного струму

Визначимо напруженість магнітного поля нескінченного лінійного провідника зі струмом. Скористаємось загальною формулою закону Біо–Савара–Лапласа (7.9)

$$\overline{\vec{H}} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\left[\vec{j}(\vec{r}\,'), \vec{R}\right]}{R^3} dV'.$$

У випадку лінійного провідника зі струмом J $\vec{j}dV'$ змінюється на $J\vec{e}_z dz'$ (лінійна густина струму $\vec{j} = J\vec{e}_z$), якщо обрати напрямок струму уздовж додатного напрямку осі z (див. рис.).



$$\vec{r} = (x, y, z); \quad \vec{r}' = (0, 0, z'); \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'.$$

Треба розрахувати інтеграл

$$\vec{H} = \frac{J}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\vec{e}_z, \vec{R}\right]}{R^3} dz'$$

Векторний добуток

$$\left[\vec{e}_z, \vec{R}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z - z' \end{vmatrix} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y = \left[\vec{e}_z, \vec{R}_\perp\right].$$

для прямолінійного провідника зі струмом не залежить від змінної інтегрування. Винесемо його за знак інтегралу.

$$\vec{H} = \frac{J}{c}\left[\vec{e}_z, \vec{R}_\perp\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[x^2 + y^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} dz'.$$

Робимо очевидну заміну $u = z - z'$, яка не змінює границі інтегрування в разі нескінченного провідника

$$\overline{\vec{H}} = \frac{J}{c}\left[\vec{e}_z, \vec{R}_\perp\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}dz' = \left\{u = z - z'\right\} =$$

$$= \frac{J}{c}\left[\vec{e}_z, \vec{R}_\perp\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+y^2+u^2\right)^{3/2}}du =$$

$$= \frac{2J}{c}\left[\vec{e}_z, \vec{R}_\perp\right]\int_{0}^{\infty}\left(x^2+y^2+u^2\right)^{-3/2}du.$$

Цей інтеграл зручно взяти за допомогою тригонометричної підстановки

$$u = \sqrt{x^2+y^2}\tan\varphi; \quad du = \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi};$$

$$\left(x^2+y^2+u^2\right)^{-3/2} = \left(x^2+y^2\right)^{-3/2}\left(1+\tan^2\varphi\right)^{-3/2} =$$

$$= \left(x^2+y^2\right)^{-3/2}\cos^3\varphi;$$

$$0 \le u < \infty; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Далі

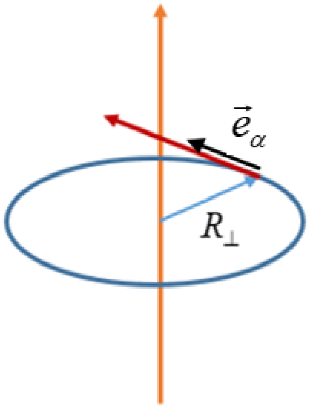
$$\vec{H} = \frac{2J}{c}\left[\vec{e}_z, \vec{R}_\perp\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\varphi}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos^2\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{2J}{c}\frac{\left[\vec{e}_z, \vec{R}_\perp\right]}{x^2+y^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi = \frac{2J}{c}\frac{\left[\vec{e}_z, \vec{R}_\perp\right]}{x^2+y^2} = \frac{2J}{c}\frac{\left(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y\right)}{x^2+y^2};$$

$$\vec{H} = \frac{2J}{c}\frac{\left(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y\right)}{x^2+y^2}; \quad \left|\vec{H}\right| = \frac{2J}{c}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\vec{H} = \frac{2J}{c}\frac{\vec{e}_\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \left|\vec{H}\right| = \frac{2J}{c}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\vec{H} = \frac{2J}{c}\frac{\vec{e}_\alpha}{R_\perp}; \quad \left|\vec{H}\right| = \frac{2J}{c}\frac{1}{R_\perp}; \quad R_\perp = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{7.12}$$



В формулі (7.12) для зручності запису ввели орт циліндричної координати φ $\vec{e}_\alpha = \dfrac{1}{R_\perp}\left[\vec{e}_z, \vec{R}_\perp\right] = \left[\vec{e}_z, \vec{e}_{R_\perp}\right]$. Позначення для координат обрали такі: $R_\perp, \alpha, z$.

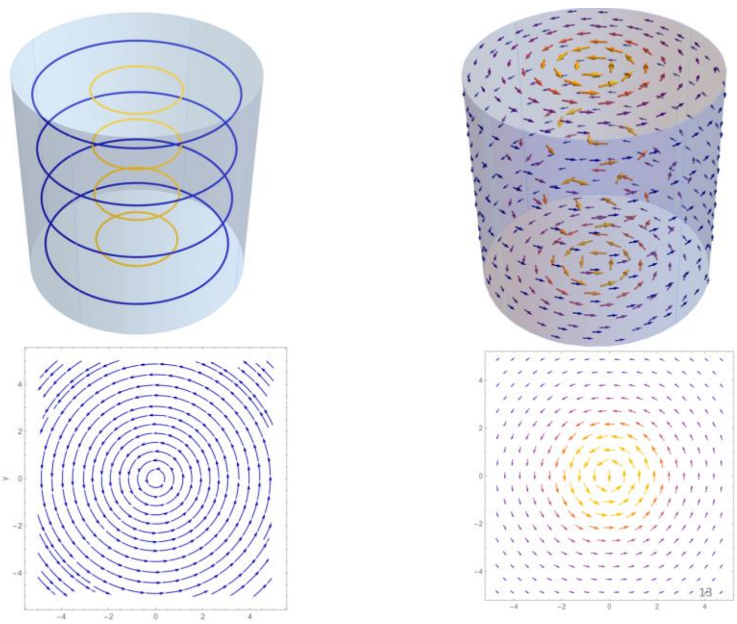
Формулу (7.12) можна було отримати за допомогою теореми про циркуляцію (див. (5.30)). Для постійного струму ця теорема виглядає так

$$\oint_C \vec{H} d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} J.$$

Обираємо контур інтегрування у вигляді кола, концентричного провіднику. Очевидно, що поле має осеву симетрію, тому на фіксованій відстані від провідника має певне фіксоване значення:

$$H 2\pi R_\perp = \frac{4\pi}{c} J; \quad H = \frac{2J}{cR_\perp}.$$

На наступних малюнках наведені результати моделювання за формулою (7.12)

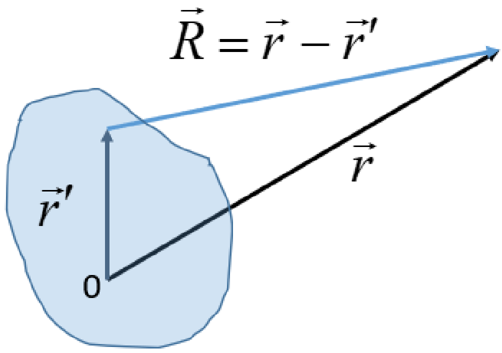


7.3. Магнітне поле на далеких відстанях. Магнітний момент

Розглянемо середнє магнітне поле, яке створюється системою стаціонарно рухомих зарядів на великих відстанях від цієї системи. Формула (7.6) для векторного потенціалу

$$\overline{\vec{A}} = \frac{1}{c}\iiint\limits_V \frac{\overline{\vec{j}(\vec{r}')}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

Система зарядів знаходиться у скінченному об'ємі з характерним лінійним розміром *a*. Припустимо, що відстань від системи зарядів до точки спостереження $r \gg a$, тоді $r' \ll r$, бо $r' \le a \ll r$. Початок координат обираємо десь всередині системи зарядів.



Розкладаємо знаменник в ряд Тейлора так само, як у випадку вивчення електростатичного поля на далеких відстанях. Обмежимось тільки дипольним наближенням, для якого достатньо тільки нульового та першого членів розкладання

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)_{x'_\alpha=0} x'_\alpha = \frac{1}{r} - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)x'_\alpha = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r},\vec{r}')}{r^3}.$$

$$\overline{\vec{A}} \approx \frac{1}{c}\iiint\limits_V \overline{\vec{j}(\vec{r}')}\left(\frac{1}{r} + \frac{(\vec{r},\vec{r}')}{r^3}\right)dV' = \frac{1}{cr}\iiint\limits_V \overline{\vec{j}(\vec{r}')}dV' + \frac{1}{cr^3}\iiint\limits_V \overline{\vec{j}(\vec{r}')}(\vec{r},\vec{r}')dV'$$

Оцінимо інтеграл

$$\iiint\limits_V \overline{\vec{j}(\vec{r}')}dV',$$

який є аналогом суми по всіх зарядах у випадку електростатики.

Скористаємось теоремою Гауса, щоб перейти від інтегрування по об'єму до інтегралу по нескінченно віддаленій поверхні. Множимо $\iiint\limits_V \overline{\vec{j}(\vec{r}')} dV'$ скалярно на довільний сталий вектор $\vec{a}$:

$$\left(\vec{a}, \iiint\limits_V \overline{\vec{j}(\vec{r}')} dV'\right) = \iiint\limits_V \left(\vec{a}, \overline{\vec{j}(\vec{r}')}\right) dV';$$

Надалі для спрощення змінимо $\overline{\vec{j}(\vec{r}')}$ на $\vec{j}(\vec{r}') \equiv \vec{j}$. Скористаємось формулою

$$\operatorname{div}(f\vec{b}) = f\operatorname{div}(\vec{b}) + (\vec{b}, \nabla f).$$

Нехай $\vec{b} = \vec{j}(\vec{r}'),\ f = (\vec{a}, \vec{r}')$:

$$\operatorname{div}\left((\vec{a},\vec{r}')\,\vec{j}\right) = (\vec{a},\vec{r}')\operatorname{div}\vec{j} + \left(\vec{j}, \nabla(\vec{a},\vec{r}')\right) = (\vec{a},\vec{r}')\operatorname{div}\vec{j} + \left(\vec{j}, \vec{a}\right)$$

Для стаціонарних струмів $\operatorname{div}\left(\vec{j}\right) = 0$, що випливає з рівняння неперервності (5.23), коли $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{=0} + \operatorname{div}\vec{j} = 0; \quad \operatorname{div}\vec{j} = 0. \tag{7.13}$$

Маємо

$$\operatorname{div}\left((\vec{a},\vec{r}')\,\vec{j}\right) = \left(\vec{a}, \vec{j}\right)$$

$$\iiint\limits_V \left(\vec{a}, \vec{j}\right) dV' = \iiint\limits_V \operatorname{div}\left((\vec{a},\vec{r}')\,\vec{j}\right) dV' = \oiint\limits_{S_\infty} (\vec{a},\vec{r}')\,\vec{j}\,d\vec{S}.$$

$$\left(\vec{a}, \iiint\limits_V \vec{j}\,dV'\right) = \left(\vec{a}, \oiint\limits_{S_\infty} \vec{r}'\vec{j}(\vec{r}')\,d\vec{S}\right); \quad \iiint\limits_V \vec{j}\,dV' = \oiint\limits_{S_\infty} \vec{r}'\vec{j}(\vec{r}')\,d\vec{S}.$$

На нескінченно віддаленій поверхні струмів немає, тому

$$\iiint\limits_V \vec{j}\,dV' = \oiint\limits_{S_\infty} \vec{r}'\vec{j}(\vec{r}')\,d\vec{S} = 0$$

$$\overline{\vec{A}} \approx \underbrace{\frac{1}{cr} \iiint\limits_V \overline{\vec{j}(\vec{r}')} dV'}_{=0} + \frac{1}{cr^3} \iiint\limits_V \overline{\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r},\vec{r}')} dV' = \frac{1}{cr^3} \iiint\limits_V \overline{\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r},\vec{r}')} dV'.$$

Векторний потенціал системи стаціонарних струмів на далеких відстанях у першому ненульовому наближенні має наступний вигляд

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{1}{cr^3}\iiint\limits_V \vec{j}(\vec{r},\vec{r}')dV'. \qquad (7.14)$$

Вираз під знаком інтегралу в (7.14) можна переписати так:

$$\vec{j}(\vec{r},\vec{r}') = \left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}'\right]\right] + (\vec{j},\vec{r})\vec{r}'.$$

Для подальшого перетворення цієї формули знов скористаємось переходом від інтегралу від вектору до інтегралу від скаляру – помножимо

$$\iiint\limits_V \vec{j}(\vec{r}')(\vec{r},\vec{r}')dV' = \iiint\limits_V \left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}'\right]\right]dV' + \iiint\limits_V (\vec{j},\vec{r})\vec{r}'dV'$$

скалярно на довільний сталий вектор $\vec{a}$.

$$\left(\vec{a},\iiint\limits_V \vec{j}(\vec{r},\vec{r}')dV'\right) = \left(\vec{a},\iiint\limits_V \left(\left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}'\right]\right] + (\vec{j},\vec{r})\vec{r}'\right)dV'\right);$$

$$\iiint\limits_V (\vec{a},\vec{j})(\vec{r},\vec{r}')dV' = \iiint\limits_V \left(\vec{a},\left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}'\right]\right]\right)dV' + \iiint\limits_V (\vec{j},\vec{r})(\vec{a},\vec{r}')dV'.$$

Перетворимо вираз під знаком другого інтегралу справа з урахуванням рівняння неперервності (7.13) для стаціонарних струмів так

$$\mathrm{div}\left((\vec{r}',\vec{r})(\vec{a},\vec{r}')\vec{j}\right) = \left(\nabla_{r'},(\vec{r}',\vec{r})(\vec{a},\vec{r}')\vec{j}\right) = (\vec{r}',\vec{r})(\vec{a},\vec{r}')\underbrace{\mathrm{div}\vec{j}}_{=0} +$$

$$+\left(\vec{j},(\vec{r}',\vec{r})\nabla_{r'}(\vec{a},\vec{r}')\right) + \left(\vec{j},(\vec{a},\vec{r}')\nabla_{r'}(\vec{r}',\vec{r})\right) =$$

$$= \left(\vec{j},(\vec{r}',\vec{r})\vec{a}\right) + \left(\vec{j},(\vec{a},\vec{r}'),\vec{r}\right) = (\vec{j},\vec{a})(\vec{r}',\vec{r}) + (\vec{a},\vec{r}')(\vec{j},\vec{r});$$

$$(\vec{a},\vec{r}')(\vec{j},\vec{r}) = \mathrm{div}\left((\vec{r}',\vec{r})(\vec{a},\vec{r}')\vec{j}\right) - (\vec{j},\vec{a})(\vec{r}',\vec{r});$$

Тепер:

$$\iiint\limits_V (\vec{a},\vec{j})(\vec{r},\vec{r}')dV' = \iiint\limits_V \left(\vec{a},\left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}'\right]\right]\right)dV' + \iiint\limits_V \mathrm{div}\left(\vec{j}(\vec{r},\vec{r}')(\vec{a},\vec{r}')\right)dV' -$$

$$-\iiint\limits_V (\vec{a},\vec{j})(\vec{r}',\vec{r})dV';$$

$$\iiint\limits_V (\vec{a},\vec{j})(\vec{r}',\vec{r})dV' = \iiint\limits_V \left(\vec{a},\left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}'\right]\right]\right)dV' + \underbrace{\oiint\limits_{S_\infty} \vec{j}(\vec{r},\vec{r}')(\vec{a},\vec{r}')d\vec{S}}_{=0} - \iiint\limits_V (\vec{a},\vec{j})(\vec{r}',\vec{r})dV'.$$

Інтеграл по нескінченно віддаленій поверхні, де немає струмів, зникає. Отримуємо таке важливе співвідношення

$$2\iiint\limits_V (\vec{a},\vec{j})(\vec{r}',\vec{r})dV' = \iiint\limits_V \left(\vec{a},\left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}'\right]\right]\right)dV' = \iiint\limits_V \left[\left[\vec{r}',\vec{j}\right],\vec{r}\right]dV';$$

$$\left(\vec{a},\iiint\limits_V \vec{j}(\vec{r}',\vec{r})dV'\right) = \left(\vec{a},\frac{1}{2}\iiint\limits_V \left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}'\right]\right]dV'\right);$$

«Відкидаємо» довільний сталий вектор та отримуємо таке співвідношення

$$\iiint\limits_V \vec{j}(\vec{r}',\vec{r})dV' = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \left[\vec{r},\left[\vec{j},\vec{r}'\right]\right]dV' = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \left[\left[\vec{r}',\vec{j}\right],\vec{r}\right]dV';$$

Можемо тепер записати замість (7.14)

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{1}{2cr^3}\iiint\limits_V \left[\left[\vec{r}',\vec{j}\right],\vec{r}\right]dV' = \frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2c}\iiint\limits_V \left[\vec{r}',\vec{j}\right]dV',\vec{r}\right].$$

Вводимо магнітний дипольний момент для об’ємних струмів

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\iiint\limits_V \left[\vec{r}',\vec{j}\right]dV'. \tag{7.15}$$

та записуємо векторний потенціал поля стаціонарних струмів на далеких відстанях через магнітний дипольний момент

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\left[\vec{m},\vec{r}\right]}{r^3} \tag{7.16}$$

Формула (7.16) є формулою для векторного потенціалу поля точкового магнітного диполя.